EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Llamaremos *expresiones algebraicas racionales* a las de la forma $\frac{A(x)}{B(x)}$ donde A(x) y B(x) son polinomios de variable x, y $B(x) \neq 0$.

Por ejemplo, $\frac{7}{x-2}$ es una expresión algebraica racional porque el numerador A(x) = 7 es un polinomio y el denominador B(x) = x − 2 también es un polinomio.

También es una expresión algebraica racional $\frac{x^3 - 2x + \sqrt{3}}{x^2 + 7x}$.

¿Es $\frac{x^5 + 3x^3}{\sqrt{x} - 3}$ una expresión algebraica racional?..

La expresión $x^2 - 9$ es también racional porque $x^2 - 9$ es un polinomio y 1, su denominador, también lo es.

Simplificación de expresiones racionales

Recordamos que, dado el racional $\frac{2}{3}$ podemos hallar otros equivalentes con él: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{14}{21} = ...$ donde $\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$ con $n \neq 0$.

Análogamente para la expresión racional $\frac{A(x)}{B(x)}$ pueden hallarse expresiones racionales ***equivalentes***: $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A(x) \cdot N(x)}{B(x) \cdot N(x)}$ siendo N(x) cualquier polinomio no nulo.

En Z muchas veces se nos presenta el problema de encontrar la fracción equivalente más simple que una dada. Por ejemplo, $\frac{77}{132} = \frac{7 \cdot \cancel{11}}{2^2 \cdot 3 \cdot \cancel{11}} = \frac{7}{12}$

También es posible simplificar expresiones algebraicas racionales *cuando existen factores comunes al numerador y al denominador*, de lo contrario la expresión racional es *irreducible.*

Consideremos $\frac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$. Factorizamos su numerador y su denominador:

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

$$x^3 + 3x^2 - x - 3 = x^2(x+3) - (x+3) = (x+3)(x^2 - 1) = (x+3)(x+1)(x-1)$$

Entonces $\frac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - x - 3} = \frac{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}}{(x+3)\cancel{(x+1)}\cancel{(x-1)}} = \frac{1}{x+3}$ **si $x \neq 1$ y $x \neq -1$**

Las dos expresiones racionales, $\frac{x^2 - 1}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$ y $\frac{1}{x+3}$ son ***equivalentes*** para **$x \neq 1$ y $x \neq -1$.**

La expresión final es equivalente a la dada para todo valor de x que no anule el factor cancelado porque ello equivaldría a dividir por cero.

Veamos otros ejemplos:

I) $\dfrac{3x^3 - 12x}{x^2 - 4x + 4} = \dfrac{3x\,(x^2 - 4)}{(x-2)^2} = \dfrac{3x\,(x+2)\cancel{(x-2)}}{(x-2)\cancel{(x-2)}} = \dfrac{3x\,(x+2)}{x-2}$ si $x \neq 2$

II) $\dfrac{x^2 + 5}{x^4 - 25} = \dfrac{x^2 + 5}{(x^2+5)\,(x^2-5)} = \dfrac{1}{x^2 - 5}$ $\forall\, x \in R$ ¿Por qué esta expresión es válida para cualquier número real?..

Actividad Nº1

Simplificar, indicando para qué valores de x la expresión resultante es equivalente a la dada.

a) $\dfrac{2x-6}{x^2-6x+9}$ b) $\dfrac{x^2+x}{x+1}$ c) $\dfrac{x^3-49x}{x^3-14x^2+49x}$ d) $\dfrac{x^2-x-6}{x^2+3x+2}$

Operaciones con Expresiones Algebraicas Racionales

Para operar con expresiones racionales, aplicamos las mismas propiedades y técnicas que para operar con fracciones numéricas.

Adición y Sustracción

Recordamos que para sumar $\dfrac{3}{14} + \dfrac{1}{21}$ necesitamos hallar fracciones equivalentes a los sumandos, de igual denominador: $\dfrac{3}{14} + \dfrac{1}{21} = \dfrac{3}{2 \cdot 7} + \dfrac{1}{3 \cdot 7} = \dfrac{3 \cdot 3 + 1 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 7} = \dfrac{11}{42}$.

Para sumar (o restar) expresiones racionales de distinto denominador, debemos sumar (o restar) expresiones equivalentes a ellas que tengan el mismo denominador. Para hallarlo, factorizamos los denominadores y luego multiplicamos los factores comunes y no comunes con el mayor exponente con el que figura (mínimo común múltiplo).

Veamos el siguiente ejemplo: $\dfrac{2}{3x^2 - 6x + 3} + \dfrac{x}{x^2 + 3x - 4} =$

Factorizamos los denominadores: $= \dfrac{2}{3(x^2 - 2x + 1)} + \dfrac{x}{(x-1)\,(x+4)} = \dfrac{2}{3(x-1)^2} + \dfrac{x}{(x-1)(x+4)} =$

Buscamos expresiones equivalentes con igual denominador: $\dfrac{2\,(x+4)}{3\,(x-1)^2(x+4)} + \dfrac{x \cdot 3\,(x-1)}{3\,(x-1)^2(x+4)} =$

Operamos en el numerador y sumamos: $= \dfrac{2x + 8 + 3x^2 - 3x}{3\,(x-1)^2(x+4)} = \dfrac{3x^2 - x + 8}{3\,(x-1)^2(x+4)}$

El numerador no tiene raíces reales, por lo tanto la expresión obtenida es irreducible.

Vamos a calcular $\dfrac{x-10}{x^2+3x-10}-\dfrac{2x+4}{x^2-4}=$

Factorizamos los denominadores: $=\dfrac{x-10}{(x-2)\,(x+5)}-\dfrac{2x+4}{(x+2)\,(x-2)}=$

Elegimos un denominador común y hallamos las expresiones equivalentes:

$$2=\frac{(x-10)\,(x+2)}{(x-2)\,(x+5)\,(x+2)}-\frac{(2x+4)\,(x+5)}{(x-2)\,(x+5)\,(x+2)}=$$

Aplicamos propiedades y restamos: $=\dfrac{x^2+2x-10x-20}{(x-2)\,(x+5)\,(x+2)}-\dfrac{2x^2+10x+4x+20}{(x-2)\,(x+5)\,(x+2)}=$

$$=\frac{x^2-8x-20-2x^2-14x-20}{(x-2)\,(x+5)\,(x+2)}=\frac{-x^2-22x-40}{(x-2)\,(x+5)\,(x+2)}=\frac{-(x+20)\,(x+2)}{(x-2)\,(x+5)\,(x+2)}=\frac{-(x+20)}{(x-2)\,(x+5)}$$

La suma de expresiones algebraicas racionales es asociativa, conmutativa, cumple la ley de cierre y posee elemento neutro: 0. Recordemos que restar es sumar el opuesto.

Actividad Nº2

Calcular: a) $\dfrac{2}{x^2-9}+\dfrac{x+1}{x^2+6x+9}-\dfrac{1}{3-x}=$ b) $\dfrac{x+5}{x^2-25}+\dfrac{x+2}{2x^2-6x-20}-\dfrac{21}{2x+2}=$

c) $\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{1}{(x+1)^2}=$

Multiplicación

Para multiplicar dos expresiones racionales $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ y $\dfrac{C(x)}{D(x)}$, procedemos así:

$$\frac{A(x)}{B(x)}\cdot\frac{C(x)}{D(x)}=\frac{A(x)\cdot C(x)}{B(x)\cdot D(x)}$$

Por ejemplo: I) $\dfrac{2x+1}{x-3}\cdot\dfrac{3x}{x+1}=\dfrac{(2x+1)\,3x}{(x-3)(x+1)}=\dfrac{6x^2+3x}{x^2-2x-3}$

II) Calculamos ahora $\dfrac{-x^2+4x}{x^2-9}\cdot\dfrac{5x+15}{x^3-4x^2}=\dfrac{(-x^2+4x)(5x+15)}{(x^2-9)(x^3-4x^2)}=$

Factorizamos cada uno de los polinomios: $=\dfrac{-x\,(x-4)5(x+3)}{(x+3)(x-3)x^2\,(x-4)}=$

Simplificamos y obtenemos el resultado: $=\dfrac{-5}{x\,(x-3)}$ si $x\neq 4$ y $x\neq -3$.

La multiplicación de expresiones algebraicas racionales cumple con la ley de cierre, es asociativa, conmutativa, tiene elemento neutro (1) y es distributiva respecto de la suma y la resta.

¿Existe inverso multiplicativo para toda expresión $\dfrac{A(x)}{B(x)}$?..

Actividad Nº 3:

Resolver: a) $\dfrac{x^2-4x+4}{2x}\cdot\dfrac{6x-12}{x^3-6x^2+12x-8}$ b) $(x^3+1)\cdot\dfrac{x+1}{x^2-x+1}\cdot\dfrac{1}{x^2+2x+1}$

División

Se llama inverso multiplicativo de una expresión algebraica racional $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ a la expresión $\dfrac{B(x)}{A(x)}$, si A es no nulo.

Para dividir dos expresiones algebraicas racionales $\dfrac{A(x)}{B(x)}$ y $\dfrac{C(x)}{D(x)}$ operamos igual que en el conjunto Q: $\dfrac{A(x)}{B(x)}:\dfrac{C(x)}{D(x)}=\dfrac{A(x)}{B(x)}\cdot\dfrac{D(x)}{C(x)}=\dfrac{A(x)\cdot D(x)}{B(x)\cdot C(x)}$ con $C(x)\neq 0$

Por ejemplo: $\dfrac{x-1}{3-x}:\dfrac{2x}{x+2}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{(3-x)2x}=\dfrac{x^2+x-2}{6x-2x^2}$

Actividad Nº 4

1) Con las expresiones $P(x)=\dfrac{2x+4}{x^2-9}$ y $T(x)=\dfrac{x+3}{x^2-x-6}$ calcular:

a) P(x) . T(x) b) P(x) : T(x) c) T(x) : P(x).

2) Resolver: a) $\dfrac{x^2-4}{x^2-9}:\dfrac{x^4-16}{x+3}$ b) $\dfrac{5x+10}{x^2-1}:\dfrac{3x+6}{x+1}$ c) $\left(\dfrac{x+4}{x^2-1}\cdot\dfrac{-x+1}{x^2+1}\right):\dfrac{-x^2-3x+4}{x^4-1}$

Actividad Nº 5

Efectuar los siguientes ejercicios combinados:

a) $\left(\dfrac{x-2}{x^2+4}+\dfrac{x+2}{x^2-x-6}\right)\cdot\dfrac{x^2-9}{4x-10}$

b) $\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-2}\right):\dfrac{4}{x^2-4}$

c) $\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x-2}:\dfrac{4}{x^2-4}$

d) $(x^3-x):\left(\dfrac{1}{x}-1\right)$

EJERCICIOS DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES

Realizar las siguientes operaciones, simplificando los resultados cuando sea posible:

a) $\dfrac{-x^2}{x^2+1}+\dfrac{x^4+1}{x^4-1}$

b) $\dfrac{1}{3}+\dfrac{x+1}{x^3+x^2}+\dfrac{x^2+2x+1}{x(x+1)^2}$

c) $\dfrac{x^2-x-6}{x^3+x}:\dfrac{-x-2}{x^4-1}$

d) $\dfrac{2x+6}{x^2-9}\,\dfrac{x+3}{x-7}+\dfrac{x}{x+7}:\dfrac{x-7}{5}$

e) $\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{2}{(x-3)^2}-\dfrac{1}{x^2-9}$

f) $\left[\dfrac{2x^2+1}{3x^2}-\dfrac{2x+1}{4x^2-1}\,\dfrac{(2x-1)^2}{3x}\right]:\dfrac{x^2+2x+1}{9x^3}$

g) $\left(x+\dfrac{x}{x-1}\right):\left(x-\dfrac{x}{x-1}\right)$